120430 初版
120501 修正
http://goo.gl/MFRFj

条件を満たす (x, y) に対する、$ax + by$ のとりうる値

3 つの不等式 $9x - 2y \geqq 0$, $3x + 2y - 24 \leqq 0$, $x - 2y \leqq 0$ を同時に満たす (x, y) の集合を D とする。

問題 1　　D において、$x + y$ のとりうる値の範囲を考えたい。

$x + y = k \cdots l$ とおく
同じ x に対しては y が大きいほうが k が大きい
$9x - 2y = 0 \cdots l_1$, $3x + 2y - 24 = 0 \cdots l_2$, $x - 2y = 0 \cdots l_3$ とする。
図より、k は l_1 または l_2 上の点で最大となり、l_3 上の点で最小となる
また、l, l_1, l_2, l_3 の傾きを考慮すると
l_1, l_2 の交点 $\mathrm{A}(2, 9)$ で最大となり、l_3, l_1 の交点 $\mathrm{O}(0, 0)$ で最小となる

よって、$(x, y) = (2, 9)$ で最大値 11 をとり、$(x, y) = (0, 0)$ で最小値 0 をとる

問題 2　　D において、$3x + y$ のとりうる値の範囲を考えたい。

$3x + y = k \cdots l$ とおく
同じ x に対しては y が大きいほうが k が大きい
$9x - 2y = 0 \cdots l_1$, $3x + 2y - 24 = 0 \cdots l_2$, $x - 2y = 0 \cdots l_3$ とする。
図より、k は l_1 または l_2 上の点で最大となり、l_3 上の点で最小となる
また、l, l_1, l_2, l_3 の傾きを考慮すると
l_2, l_3 の交点 $\mathrm{B}(6, 3)$ で最大となり、l_3, l_1 の交点 $\mathrm{O}(0, 0)$ で最小となる

よって、$(x, y) = (6, 3)$ で最大値 21 をとり、$(x, y) = (0, 0)$ で最小値 0 をとる

問題 3　　D において、$y - x$ のとりうる値の範囲を考えたい。

$y - x = k \cdots l$ とおく
同じ x に対しては y が大きいほうが k が大きい
$9x - 2y = 0 \cdots l_1$, $3x + 2y - 24 = 0 \cdots l_2$, $x - 2y = 0 \cdots l_3$ とする。
図より、k は l_1 または l_2 上の点で最大となり、l_3 上の点で最小となる
また、l, l_1, l_2, l_3 の傾きを考慮すると
l_1, l_2 の交点 $\mathrm{A}(2, 9)$ で最大となり、l_2, l_3 の交点 $\mathrm{B}(6, 3)$ で最小となる

よって、$(x, y) = (2, 9)$ で最大値 7 をとり、$(x, y) = (6, 3)$ で最小値 -3 をとる

問題 4　　D において、$5x-y$ のとりうる値の範囲を考えたい。

$5x-y=k\cdots l$ とおく
同じ x に対しては y が大きいほうが k が小さい
$9x-2y=0\cdots l_1$, $3x+2y-24=0\cdots l_2$, $x-2y=0\cdots l_3$ とする。
図より、k は l_1 または l_2 上の点で最小となり、l_3 上の点で最大となる
また、l, l_1, l_2, l_3 の傾きを考慮すると
$l_3,\ l_1$ の交点 $\mathrm{O}(0,0)$ で最小となり、$l_2,\ l_3$ の交点 $\mathrm{B}(6,3)$ で最大となる

よって、$(x,y)=(0,0)$ で最小値 0 をとり、$(x,y)=(6,3)$ で最大値 27 をとる

解説
1 つめの下線について
補題 1　　P, Q の座標を (x_1,y_1), (x_2,y_2) とする。
$b>0$ とする。
$x_1=x_2$, $y_1<y_2$ とすると、Q のほうが $ax+by$ の値は大きい

証明
$(ax_2+by_2)-(ax_1+by_1)=b(y_2-y_1)$
仮定よりこの式の値は正である。
$b<0$ ならば、逆に Q のほうが値は小さい

だから、y の係数をみると、上で探せばよいか、下で探せばよいかがわかるので、それを理由とすればよい。

2 つめの下線について
補題 2　　直線 l' : $a'x+b'y+c'=0$ 上に点 P, Q をとり、その座標を (x_1,y_1), (x_2,y_2) とする。
$b>0$ とする。また、$x_1<x_2$ とする。
Q のほうが $ax+by$ の値は大きいことの必要十分条件は $-\dfrac{a'}{b'}=m'$ が $-\dfrac{a}{b}=m$ がより大きいことである。
(直線 l' の傾きが $ax+by$ の変化率より大きい)

練習問題　　証明してみよ。

つまり、図における直感と結びついて
$b>0$ とすると、
$m'>m$ ならば、右の点ほど大きく、左の点ほど小さい。
$m'<m$ ならば、左の点ほど大きく、右の点ほど小さい。

$b<0$ とすると、
$m'>m$ ならば、左の点ほど大きく、右の点ほど小さい。
$m'<m$ ならば、右の点ほど大きく、左の点ほど小さい。

だから、傾きを考慮すればどこで最大、最小をとるかわかるので、それを理由とすればよい。