120501 初版
http://goo.gl/MFRFj

直線のベクトル方程式

直線上の任意の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ の満たしているまた満たすべき方程式を直線のベクトル方程式という。

点 A($\vec{a}$) を通り、$\vec{d}$ を方向ベクトルとしてもつ直線について。
方向ベクトルの定義により、
直線上の任意の点 P($\vec{p}$) について、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$ となる実数 t が一意に存在する。
すなわち、$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \cdots$ ① が成り立つ。
これを公式と見ることができる。

2 点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を通る直線 AB について。
見方 1
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとみて、上の公式 ① を使うと、
$\vec{p} = \vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
すなわち、$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \cdots$ ②
見方 2
直線上の点を P($\vec{p}$) とすると、3 点 A, B, P は一直線上にあるから、
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t が一意に存在する。
すなわち、$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$
見方 3
P は線分 AB を $t : (1-t)$ に分ける点と見ることができる。
すなわち、$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$
見方 4
基底 $\vec{a}, \vec{b}$ を与えるとき、平面上の任意の点 P($\vec{p}$) に対して、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となる実数の組 (s, t) が一意に存在するが、② の式は、P が直線 AB 上にある必要かつ十分な条件は、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表したとき $s+t=1$ である、ということを意味している。

問題　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。
平行四辺形 OACB を考え、辺 OA の中点を M とする。
次の直線上の点 P($\vec{p}$) のベクトル方程式をそれぞれ求めよ。
(1) 直線 AC　　(2) 直線 BM

直線 AC 上の点 P について、公式 ② より、
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
ここで、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$ だから、
$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$

別の見方があって、
直線 AC 上の点 P については、ある t について、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ だから、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{b}$
始点変更公式により、$\vec{p}-\vec{a}=t\vec{b}$
すなわち、$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$

直線 BM 上の点 P について、公式 ② より、
$\vec{p}=(1-t)\vec{b}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$
ここで、$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{a}$ だから、
$\vec{p}=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

別の見方があって、
直線 BM 上の点 P については、ある t について、$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BM}}$
始点変更公式により、$\vec{p}-\vec{b}=t(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\vec{b})$
すなわち、$\vec{p}=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

補足
パラメータのとり方によって、答えはたくさんある。
例えば、直線 BM のベクトル方程式は、$\vec{p}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ と答えても正しい。これは、$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ となる s をとっている式である。