120625 初版
http://goo.gl/MFRFj

三角関数　方程式の解の個数

a を定数とする θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。
(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めよ。
(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ。

まず $\cos\theta = t$ とおいて，この方程式を $t^2 + t - 1 - a = 0$ と書き換えるのはよいだろう。
(1) はこれが解をもつための条件を求めることになるのだが，それでは弱い。
これが $-1 \leqq t \leqq 1$ で少なくとも 1 つ解をもつ条件を求めることになる。

つまり，次のように言い換える。
$\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において解をもつ
$\Leftrightarrow -1 \leqq t \leqq 1$ において，$t^2 + t - 1 - a = 0$ を満たす t が少なくとも 1 つある

さらにこの条件を次のように言い換えることはよくあるのだが，

$-1 \leqq t \leqq 1$ において，$y = t^2 + t - 1 - a$ が $y = 0$ と少なくとも 1 つ共有点をもつ

それは (2) を解くときに厄介なことになる。

そこで，次のように言い換える。
$-1 \leqq t \leqq 1$ において，$t^2 + t - 1 - a = 0$ を満たす t が少なくとも 1 つある
$\Leftrightarrow -1 \leqq t \leqq 1$ において，$t^2 + t - 1 = a$ を満たす t が少なくとも 1 つある
$\Leftrightarrow -1 \leqq t \leqq 1$ において，曲線 $y = t^2 + t - 1$ と直線 $y = a$ が少なくとも 1 つ共有点をもつ

$-1 \leqq t \leqq 1$ において，$y = t^2 + t - 1$ の増減表をかくと

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1

したがって，求める a の条件は $-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1$ である。

次に a に対する解の個数を調べてみる。

(1) より $a < -\dfrac{5}{4}$ または $1 < a$ のとき $-1 \leqq t \leqq 1$ なる t をもたないので θ も存在しない。

例えば，$a = -\dfrac{5}{4}$ ならば $-1 \leqq t \leqq 1$ なる t としては $t = -\dfrac{1}{2}$ ただ 1 つであるので，θ は 2 つある。(具体的には $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$)

例えば，$-\dfrac{5}{4} < a < -1$ ならば $-1 \leqq t \leqq 1$ なる t としてはちゃんと 2 個ある。詳しくは $-1 < t < -\dfrac{1}{2}$ に 1 個，$-\dfrac{1}{2} < t < 0$ に 1 個 t がある。それぞれの t に θ は 2 個ずつあるので，θ としては 4 個ある。

例えば，$a = -1$ ならば $t = -1$，0 と 2 個 t がある。$t = -1$ からは θ は 1 個, $t = 0$ からは θ は 2 個あるので，θ としては 3 個ある。(具体的には $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$)

ふつう，正確には $-1 < t < 1$ において 1 個の t からは θ は 2 個ある。θ と t の関係を増減表にすると

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$t = \cos\theta$	1	$\searrow$	t_1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

θ	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$2\pi - \alpha$	$\cdots$	(2π)
$t = \cos\theta$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	t_1	$\nearrow$	(1)

次の表，$t(= \cos\theta)$ の値に対する θ の個数は本質的である。

$t = \cos\theta$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
θ の個数	0	1	2	1	0

したがって，

a	$\cdots$	$-\dfrac{5}{4}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
t の個数	0	1	2	2	1	1	0
θ の個数	0	2	4	3	2	1	0